**NHẮC LẠI NỘI DUNG CỦA CHƯƠNG :**

**A.HỆ THỐNG KIẾN THỨC**

**I. Hệ trục tọa độ trong không gian**

1. **Định nghĩa**: Hệ gồm ba trục Ox, Oy, Oz gọi là hệ tọa độ afin trong không gian

Hệ trục tọa độ trong định nghĩa trên còn gọi là hệ trục tọa độ afin trong không gian

Trong trường hợp ba trục Ox, Oy, Oz đôi một vuông góc nhau thì ta gọi hệ trục tọa độ đó là hệ trục tọa độ trực chuẩn trong không gian.

Kí hiệu: 

Ta có:





**2) Tọa độ của vectơ trong hệ trục tọa độ trực chuẩn và afin**

a) Định nghĩa: Trong không gian tọa độ Oxyz với các vectơ đơn vị là  trên các trục. Cho  là một vectơ bất kì trong hệ trục tọa độ Oxyz. Khi đó ta có:

. Khi đó bộ ba số (x,y,z) gọi là tọa độ của  trong hệ trục tọa độ Oxyz. Ta kí hiệu:  hoặc 

b) Một số tính chất

Cho  khi đó ta có:

* 
* 
* 
* 
* 

Ngoài ra trong hệ trục tọa độ trực chuẩn ta còn có các công thức sau:

* 
* 

**Ví dụ:** : **Chứng minh rằng: vuông góc với .**

**Giải**

Ta có:



Vậy 

**3)Tọa độ của điểm**

* 
* 

Ngoài ra trong hệ trục tọa độ trực chuẩn ta còn có các công thức sau:

* 

**4)Tích có hướng của hai vectơ trong hệ tọa độ trực chuẩn**

a) Định nghĩa: Tích có hướng (hay tích vectơ) của hai vectơ  và  là một vectơ

kí hiệu:  được xác định bằng tọa độ như sau:



b)Tính chất:

* Vectơ  vuông góc với cả hai vectơ , tức là: 
* 

c) Ứng dụng của tích có hướng

* Tính diện tích hình bình hành
* Tính thể tích khối chớp

**II.Phương trình mặt phẳng**

**1)Dạng của phưong trình mặt phẳng**

Trong không gian Oxyz, mỗi phương trình:  đều là phương trình của một mặt phẳng xác định

**Ví dụ:**  Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua 3 điểm M(0;1;1),N(1;-2;0),P(1;0;2).

Giải

Ta có: 

(P) là mặt phẳng đi qua M và có vectơ pháp tuyến là  nên (P) có phương trình là:

 hay 

**2)Vị trí tương đối giữa hai mặt phẳng**

Cho hai mặt phẳng (P) và (P’) lầ lượt có phương trình

(P): 

(P’): 

* Hai mặt phẳng đó cắt nhau khi và chỉ khi: 
* Hai mặt phẳng đó song song khi và chỉ khi: 
* Hai mặt phẳng đó trùng nhau khi và chỉ khi: 

**3)Khoảng cách từ một điểm tới mặt phẳng**

Trong không gian Oxyz, cho điểm  và mặt phẳng (P) có phương trình: 

Khi đó ta có khoảng cách từ  đến (P) là:



**III.Phương trình đường thẳng**

**1)Phương trình tham số và phương trình chính tắc của đường thẳng**

Trong không gian Oxyz cho đường thẳng (d) đi qua điểm  và có vectơ chỉ phương là  ().

* Khi đó phương trình tham số của đường thẳng (d) là:

(d): ()

* Trong trường hợp  thì ta có phương trình chính tắc của đường thẳng (d) là:



**2)Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng**

Gọi  lần lượt là các vectơ chỉ phương của (d) và (d’), khi đó ta có:

* (d) và (d’) trùng nhau  đôi một cùng phương 
* (d) song song (d’) 
* (d) và (d’) cắt nhau 
* (d) và (d’) chéo nhau 

**IV.Một số kiến thức bổ sung về vectơ trong giải toán**

* Cho M thuộc đoạn AB. Ta gọi M chia đoạn AB theo tỉ số k nếu như:  , dễ thấy 

Khi đó ta có:  với k là một điểm bất kì trong không gian hay trong mặt phẳng.

Công thức trên vẫn đúng khi điểm M bất kì nằm trên đường thẳng AB.

Trường hợp đặc biệt: Gọi M là trung điểm của AB. Áp dụng công tức trên với  ta được:



* Áp dụng công thức trên với  thì ta có: , tức là: 
* 
* Trong không gian cho n điểm . Điểm G gọi là tâm tỉ cự của hệ n điểm trên theo bộ số  nếu như : 

Khi đó với M là điểm bất kì trong không gian thì ta có: 

**Các trường hợp đặc biệt:**

* Cho hai điểm A,B với G là trung điểm của AB và M là một điểm bất kì trong không gian, khi đó :



* Trong tam giác ABC với G là trọng tâm của tam giác đó và M là một điểm bất kì, khi đó ta có:



**Ví dụ:** Trong không gian cho 2 điểm A và B. Tìm tập hợp những điểm M trong không gian thỏa mãn hệ thức sau:  với k là một hằng số thực cho trước.

**Giải**

Đặt , gọi G là trung điểm của AB, ta có:



Ta lại có: 





Vậy ta có các trường hợp sau đây:

* Nếu  thì không có điểm M thỏa đề.
* Nếu  thì 
* Nếu  thì tập hợp những điểm M thỏa đề chính là mặt cầu tâm G bán kính 

**Liên quan đến tâm tỉ cự ta có công thức sau:**

Cho tam giac giac ABC, M là điểm bất kì trong tam giác, khi đó ta có điểm M chính là tâm tỉ cự của ba điểm A,B,C với bộ số  tức là ta luôn có:



Khi đó nếu I là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác ABC thì ta có:  trong đó 

**Ví dụ:** Trong hệ trục tọa độ Oxyz cho ba điểm . Tìm tọa độ tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

**Giải**

Ta có .

Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác ABC, khi đó ta có:





**V.Các công thức đổi trục tọa độ**

**1.Trong mặt phẳng**

Cho hai hệ trục tọa

 và , O’, , lần lượt có tọa độ trong hệ trục tọa độ là

 thì ta có công thức chuyển trục tọa độ từ O sang O’ là:

(\*)

**Các trường hợp đặc biệt**

*a.Tịnh tiến*

Công thức tịnh tiến từ hệ tục tọa độ  sang hệ trục tọa độ  là:



*b.Quay*

Công thức quay hệ trục tọa độ góc sang hệ trục tọa độ  là:



**2.Trong không gian**

Cho hai hệ trục tọa

 và , O’, ,,  lần lượt có tọa độ trong hệ trục tọa độ là

 thì ta có công thức chuyển trục tọa độ từ O sang O’ là:

 (\*)

***Các trường hợp đặc biệt***

*a.Tịnh tiến*

Công thức tịnh tiến từ hệ tục tọa độ  sang hệ trục tọa độ  là:



b.Quay

Cho hai hệ trục tọa độ ,. Đặt , khi đó 

Khi đó ta có công thức chuyển trục khi quay sang  là:



**B.CÁC BÀI TẬP**

**Bài 1:** Trong không gian hệ tọa độ Descartes cho 3 điểm A(1;-1;2), B(-1;0;3),C(0;2;1). Tìm diện tích tam giác ABC..

**Giải**

Ta có:





**Bài 2:** Tìm giao điểm của đường thẳng qua 2 điểm  với các mặt phẳng tọa độ.

**Giải**

Gọi là giao điểm của đường thẳng  với mặt phẳng xOy và a là tỉ số mà I chia đoạn , khi đó ta có:



Tương tự ta tìm được hai giao điểm kia là: 

CHƯƠNG II:

**I.Định nghĩa đường bậc hai**

Đa thức bậc hai theo  là đa thức dạng:

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ  (afin, trực chuẩn):

Tập hợp những điểm có tọa độ thỏa phương trình  được gọi là đường bậc hai

**II.Các vấn đề đường bậc hai**

**CHỦ ĐỀ 1:**

**1.Lý thuyết**

Trong , (1) và đường thẳng  (2)

Xét hệ: 

Từ , trong đó:

(3)





Biện luận:



**►Chú ý:** Trường hợp  là 2 điểm ảo liên hợp.

**Ví dụ 1:** Tìm giao của đường thẳng và các đường cong sau:

 và Ox, Oy.

 và 

**Giải:** a). 

Vậy 

Tương tự, 

Vậy 

b).



Vậy 

**Ví dụ 2:**

a). Viết đường thẳng d qua O cắt  tại 1 điểm duy nhất.

b). Viết phương trình đường thẳng qua (2; 0) cắt  tại 1 điểm duy nhất. Tính góc giữa 2 đường thẳng đó.

c). Tìm m để  cắt  tại 1 điểm duy nhất.

**Giải:**

a). (d) qua O có dạng 







Để d cắt (C) tại 1 điểm duy nhất  có nghiệm duy nhất. 

Chọn 

Vậy có 2 đường thẳng thỏa mãn ycbt: 

b). Đường thẳng qua (2; 0) có phương trình 

.





Để d cắt (C) tại 1 điểm duy nhất  có nghiệm duy nhất 

Chọn 

Vậy có 2 đường thẳng thỏa mãn ycbt: 

Vectơ chỉ phương: 





c). .

Để d cắt (C) tại 1 điểm duy nhất  có nghiệm duy nhất.

 có nghiệm duy nhất.

 có nghiệm duy nhất..

. Vậy với  thì thỏa mãn ycbt.

**CHỦ ĐỀ 2:**

**1.Định nghĩa**

Cho đường bậc hai  có phương trình: . Điểm  được gọi là tâm của đường bậc hai  nếu trong hệ trục tọa độ có  là góc thì phương trình  không chứa số hạng bậc nhất 

**2.Công thức xác định tâm.**

Trong  cho  có phương trình:  (1).

Lấy  , tịnh tiến hệ trục tọa độ  theo vectơ  thành hệ trục tọa độ 

công thức đổi trục: , thay vào phương trình của đường bậc hai ta được:



Để  là tâm của  thì:  (\*)

Ta có các trường hợp sau xảy ra:

* Nếu  thì (\*) có nghiệm duy nhất  có tâm duy nhất
* Nếu  thì (\*) vô nghiệm   không có tâm
* Nếu  thì (\*) có vô số nghiệm  có vô số tâm

Trong trường hợp đường bậc hai chỉ có một tâm ta nói rằng đường bậc hai này có tâm

**Nhận xét:**

1. Cho đường bậc hai  có tâm , trong hệ trục có  là góc phương trình (C) có dạng 

Khi thay  thì phương trình của  không đổi, từ đó suy ra tâm  là tâm đối xứng của 

1. Đường bậc hai  có tâm  thì phương trình của  là: 

**3.Bài tập**

**Bài 1:** Tìm tâm của đường cong sau

**Giải**

Tọa độ của tâm (nếu có) là nghiệm của hệ: 

Vậy tọa độ của tâm  là: 

**Bài 2:** Lập phương trình tổng quát của tất cả các đường cong bậc hai có cùng tâm ****

**Giải**

Phương trình của đường bậc hai trong hệ trục tọa độ nhận  làm góc là:



Thay  ta được phương trình tổng quát của đường bậc hai nhận  làm tâm là:



**Bài 3:** Tìm quỹ tích những tâm của các đường cong  (trong đó a là tham số.)

**Giải**

Tọa độ của tâm là nghiệm của hệ: 



Vậy quỹ tích tâm là đường thẳng 

**Bài 4:** Tìm tập hợp tâm của các đường cong đi qua bốn điểm 

**Giải**

Đường cong bậc hai tổng quát có dạng: 

Ta có: 







Vậy ta có hệ phương trình sau: 



Tọa độ của tâm là nghiệm của hệ  (\*)

Nếu 

Nếu  suy ra (\*) trở thành: 



(\*\*)

Ta thấy  cũng thỏa (\*).

Vậy quỹ tích tâm cần tìm là đường bậc hai có phương trình: 

**Bài 5:** Một đường cong bậc hai đi qua góc tọa độ và các điểm . Biết tâm của nó là .Lập phương trình của đường cong đó

**Giải**

Phương trình của đường bậc hai là 

(1)

 (2)

(3)

Từ (1),(2),(3) ta ta có hệ phương trình: 

Vậy phương trình của đường bậc hai cần tìm là: 

**CHỦ ĐỀ 3:**

**1.Định nghĩa phương tiệm cận**

Trong  cho (C) có phương trình: .(1)

Phương  được gọi là phương tiệm cận của đường bậc hai (C) nếu .

**Nhận xét:**

Dựa vào vị trí tương đối giữa đường thẳng và đường bậc hai ( C) ta th6y1 rằng nếu một đường thẳng có phương là phương tiệm cận thì nó hoặc không cắt (C) hoặc cắt (C) tại 1 điểm hoặc nằm trọn trên (C).

**2.Đường tiệm cận**

Cho đường bậc hai (C) có tâm . Đường thẳng qua  có phương là phương tiệm cận và không cắt (C) được gọi là đường tiệm cận của (C).

**Nhận xét:**

Dựa vào định nghĩa trên ta suy ra phương pháp tìm đường tiệm cận của đường bậc hai (C) như sau:

* Tìm tâm 
* Nếu  ta không có đường tiệm cận.
* Nếu thì ta tìm phương tiệm cận  rồi từ đó suy ra đường tiệm cận.
* Hệ số góc  của đường tiệm cận là nghiệm của phương trình: 

**Chứng minh**

Phương tiệm cận là nghiệm của phương trình: 



**3.Bài tập**

**Bài 1:Tìm tiệm cận của đường bậc hai sau: **

**Giải**

Tọa độ tâm là nghiệm của hệ phương trình sau: 

Phương tiệm cân  là nghiệm của hệ: 

Nếu  suy ra phương trình của đường tiệm cận là: 

Nếu  suy ra phương trình của đường tiệm cận là: 

Vậy có hai đường tiệm cận là:  và 

**Bài 2:** Chứng minh rằng nếu hai đường cong có chung tiệm cận, thì các hệ số trong phương trình của chúng , trừ số hạng tự do có hệ số tỉ lệ với nhau.

**Giải**

Xét hai đường cong có phương trình:

 (1)



Giả sử hai đường cong này có chung tiệm cận.

Phương trình cho hệ số góc các tiệm cận của (1) là: 

Phương trình cho hệ số góc các tiệm cận của (2) là: 

Hai phương trình này phải có nghiệm trùng nhau , vậy các hệ số của chúng phải tỉ lệ: 

Hai đường cong này có cùng tiệm cận nên nó phải có cùng tâm.

Tâm của  là nghiệm của hệ:  (I)

Tâm của  là nghiệm của hệ: (II)

Hệ (I) và (II) phải có cùng nghiệm, tức là hệ (I) và (II) phải tương đương với nhau

Suy ra .

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

**Bài 3:** Lập phương trình tổng quát của tất cả những đường cong nhận hai đường thẳng  và  làm tiệm cận

**Giải**

Cặp đường thẳng  có thể được coi là đương bậc hai suy biến thành hai đường thẳng.

Đường bậc hai này có hai tiệm cận là hai đường thẳng đó và phương trình của nó là:



Theo bài trên thì phương trình tổng quát của các đường bậc haI cần tìm là: 

**Bài 4:** Lập phương trình của đường cong bậc hai đi qua điểm  và nhận các đường thẳng ,  làm tiệm cận.

**Giải**

Theo bài trên thì phương trình đường bậc hai cần tìm sẽ có dạng: 

Ta lại có (C) đi qua điểm nên ta có: 

Vậy phương trình của đường bậc hai cần tìm là: 

**Bài 5:** Lập phương trình đường cong tiếp xúc với đường thẳng  và nhận các đường thẳng 

**Giải**

Nếu áp dụng kết quả của những bài trên thì ta sẽ có ngay lời giải. Sau đây ta sẽ trình bày cách giải không áp dụng kết quả của những bài trên.

Gọi phương trình tổng quát của đường bậc hai là: 

Ta có tọa độ tâm  là nghiệm của hệ phương trình sau: 

Tịnh tiến hệ trục tọa độ , công thức đổi trục: 

Phương trình của đường bậc hai trong hệ trục tọa độ mới là: 

Phương trình của hai tiệm cận trong hệ trục tọa độ mới là: 

Phương trình của đường thẳng tiếp xúc với đường cong trong hệ trục tọa độ mới là: 

Ta có phương của đường thẳng có phương trình  là: (0,-1) nên ta có: 

Ta có phương của đường thẳng  là (1,2) nên ta có: 

Điều kiện để (C) tiếp xúc với đường thẳng  là phương trình sau đây có nghiệm kép: 

Chọn 

Thay  ta được phương trình của đường bậc hai trong hệ trục tọa độ ban đầu là:



**Bài 6:** Lập phương trình của đường bậc hai đi qua các điểm  với một tiệm cận của nó là trục hoành.

**Giải**

Phương trình của đường bậc hai tổng quát có dạng: (1)

Phương của trục hoành là: (1,0), mà trục hoành là tiệm cận nên ta suy ra: 

Phương trình hoành độ giao điểm giữa trục hoành và đường bậc hai là: 

mà  (2)

mặt khác do trục hoành là đường tiệm cận của đường bậc hai (C) nên ta suy ra phương trình (2) phải vô nghiệm, tức là: 

vậy ta có: 

ta có:

 (3)

(4)

 (5)

Từ (3), (4), (5) ta có hệ phương trình sau: 

Giải hệ ta được 

Vậy đường bậc hai cần tìm là: 

**CHỦ ĐỀ 4:**

**1.Định nghĩa:**

Đường thẳng (d) là tiếp tuyến của đường bậc hai nếu hoặc cắt  tại 2 điểm trùng nhau.

**2.Phương trình tiếp tuyến của đường bậc hai**

**Cho có phương trình (1). Viết phương trình tiếp tuyến của đường bậc hai tại điểm .**

**Giải**

Gọi (d) là đường thẳng qua và có vectơ chỉ phương là (2)

Thay (2) vào (1) ta được: (3)

Ta có 



Nếu 

Nếu 

Tóm lại (d) là tiếp tuyến của đường bậc hai  khi và chỉ khi 



Giả sử 

Chọn 

(2) 

(4)

Sau đây ta sẽ đưa (4) về dạng công thức tách đôi.

Ta có:



(5)

(5) chính là công thức tách đôi

**3.Bài tập**

**Bài 1:** Lập phương trình các tiếp tuyến với đường cong tại các điểm có hoành độ bằng .

**Giải**

Cho 

Xét :

Phương trình tiếp tuyến với đường cong tại điểm  là: 

Vậy tiếp tuyến tại điểm là 

Xét :

Phương trình tiếp tuyến với đường cong tại điểm là:



Vậy phương trình tiếp tuyến với đường cong tại điểm  là 

**Bài 2:** Qua điểm , hãy kẻ các tiếp tuyến với đường cong : ****

**Giải**

Phương trình tiếp tuyến với đường cong tại điểm 



Ta có: ****

Vậy ta có hệ phương trình: 



Nếu 

Nếu 

Vậy phương trình của hai tiếp tuyến là:  và 

**Bài 3:** Trong những đường thẳng tiếp xúc với đường cong . Hãy tìm những đường thẳng song song với trục hoành.

**Giải**

Phương trình tiếp tuyến với đường cong tại điểm 

Ta có:  song song với trục hoành nên ta có: 

Vậy ta có hệ phương trình: 



Vậy phương trình các tiếp tuyến song song với trục hoành là:  hoặc 

**Bài 4:** Tìm đường bậc 2 (C) đi qua gốc O tiếp xúc với đường thẳng tại điểm (1;-2) và đường thẳng  tại điểm (0;-1).

**Giải**

Ta sử dụng phương pháp tách đôi để giải quyết bài toán.

Phương trình tổng quát của (C) có dạng: 

Do (C) đi qua gốc O ⇒ f = 0.

d1 là tiếp tuyến của (C) tại điểm (1;-2), theo công thức tách đôi ta có :



Đồng nhất hệ số ta thu được hệ:  (1)

d2 là tiếp tuyến của (C) tại điểm (0;-1), theo công thức tách đôi ta có :

Đồng nhất hệ số ta thu được hệ: (2)

Vậy ta có hệ sau: 

Xét (3),(4) , chọn 

Suy ra: 

**CHỦ ĐỀ 5:**

**1.Định nghĩa:**

Quỹ tích trung điểm của các dây cung MN có phương  nằm trên đường thẳng (d). Đường thẳng này gọi là đường kính lien hợp với phương 

**2. Thiết lập phương trình của đường kính liên hợp với phương .**

Cho (C) có phương trình:  

 và khác phương tiệm cận.

(d) có phương , (d) cắt ( C ) tại 2 điểm . Tìm tập hợp trung điểm  của 

**Giải**

Ta có (d) có phương trình là:

 (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra: 

Trong đó: , ,.

Ta có:  và tọa độ của  thỏa mãn:



 là trung điểm của  nên ta có:



Áp dụng hệ thức viet ta có: 



Ta lại có không là phương tiệm cận nên ta suy ra  và  không đồng thời bằng 0.

Vậy phương trình của đường kính liên hợp với phương  có phương trình là:



**Nhận xét**:

* Nếu đường bậc hai (C) có tâm thì đường kính liên hợp luôn luôn đi qua tâm.
* Phương trình đường kính liên hợp với các dây có hệ số góc k là: 

**Chứng minh**

Phương trình đường kính liên hợp với phương **** là: 

 (điều phải chứng minh)

* Nếu (d) là đường kính liên hợp với phương **,** đường kính liên hợp với các dây có phương là đường thẳng (d) sẽ là đường thẳng có phương ****

**Chứng minh**

Gọi phương của  là . Phương trình của đường thẳng (d) là đường kính liên hợp với phương **:**



Suy ra phương của (d) là: 

Suy ra phương trình của đường thẳng liên hợp với phương của đường thẳng (d) là:



Phương của đường thẳng này là: (1,k) hay 

* Cho (d) là đường kính liên hợp với phương có hệ số góc k. (d) có hệ số góc k’. Khi đó ta có mối liên hệ giữa k và k’ là: 

**Chứng minh**

Theo bài trên ta đã có: 

Từ đó ta suy ra điều phải chứng minh.

**3.Bài tập**

**Bài 1:** Tìm hai đường kính liên hợp của đường cong , biết rằng một đường kính đi qua gốc tọa độ.

**Giải**

Tọa độ tâm  là nghiệm của hệ:



Phương trình của đường kính đi qua góc tọa độ là: 

Gọi hệ số góc của đường kính thứ 2 là k’, khi đó ta có:



Vậy đường kính thứ 2 có hệ góc là  và đi qua nên có phương trình là: 

**Bài 2:** Cho đường cong (C) có phương trình là: . Lập phương trình đường kính liên hợp với các dây song song với trục hoành và đường kính liên hợp với nó.

**Giải**

Phương trình đường kính liên hợp với dây có hệ số góc k là: 

Hay (1)

Thay  vào ta được phương trình của đường kính liên hợp với các dây song song với trục hoành là:

(d):

Ta có (d) có hệ số góc là 

Thay  vào (1) ta được

phương trình đường kính liên hợp với các dây có phương là phương của đường thẳng (d) là: 

**Bài 3:** Qua điểm , dựng đường kính của:  và đường kính liên hợp với nó. Viết phương trình các đường kính đó.

**Giải**

Tọa độ tâm là nghiệm của hệ: 

Phương trình của đường kính đi qua điểm  là: 

Ta có (d) có hệ số góc là: 

Phương trình của đường kính liên hợp với các dây song song với đường thẳng (d) là:

 hay 

**Bài 4:** Cho đường cong  và một đường kính của nó là: 

Lập phương trình đường kính liên hợp với đường kính trên.

**Giải**

Hệ số góc của đường kính này là: . Phương trình đường kính liên hợp với dây có hệ số góc  là:  hay 

**Bài 5:** Lập phương trình đường kính của  song song với đường thẳng 

**Giải**

Phương trình đường kính liên hợp với các dây có hệ số góc k là: 

Hay 

Ta có (d) song song với đường thẳng có phương trình **** nên:



Vậy phương trình của (d’) là: (d’): 

**Bài 6**: Cho đường cong . Tìm quỹ tích trung điểm những dây:  
a. Song song với trục Ox.  
b. Song song với trục Oy.  
c. Song song với đường thẳng 

**Giải**

1. Trục Ox có phương là: (1,0)

Suy ra phương trình của đường kính liên hợp với các dây có phương song song với trục Ox là:  hay 

1. Trục Oy có phương là (0,1)

Suy ra phương trình của đường kính liên hợp với cac1da6y có phương song song với trục Oy là:

 hay 

1. Đường thẳng có phương trình ****

Có hệ số góc là . Suy ra phương trình của đường kính là:  hay

**Bài 7:** Lập phương trình các đường kính liên hợp của đường cong:  mà tạo với nhau một góc .

**Giải**

Gọi  là hệ số góc của hai đường kính phải tìm. Theo lý thuyết ở phần trên ta có mối liên hệ giữa  là:  (1)

Ta có hai đường kính này tạo với nhau một góc **** nên ta có:  (2)

Vậy từ (1) và (2) ta có hệ phương trình sau:







Trường hợp 1:  ta suy ra phương trình của hai đường kính là:

 và 

Trường hợp 2:  ta suy ra phương trình của hai đường kính là:

 và 

**Bài 8:**Cho đường bậc hai (C) có phương trình: . Lập phương trình đường kính của đường bậc hai đó:  
a. Tạo một góc  với các dây liên hợp  
b. Vuông góc với các dây liên hợp

**Giải**

**a.**

Gọi  là hệ số góc của các dây cung tạo với đường kính liên hợp một góc **.**

phương trình của đường kính liên hợp với các dây có hệ số góc **** là:  hay 

ta có (d) có hệ số góc là 

ta lại có mối liên hệ giữa : từ đó ta suy ra phương trình của hai đường kính là:



b.

Ta có mối liên hệ giữa  là: 

Suy ra phương trình của đường kính là: 

**Bài 9:** Lập phương trình đường kính chung cho hai đường cong:  và 

**Giải**

Gọi  là hệ số góc của các dây liên hợp với đường kính của đường cong .

Phương trình đường kính của liên hợp với các dây có hệ số góc  là:

 hay  (1)

Phương trình đường kính của  liên hợp với các dây có hệ số góc  là:

 hay (2)

Ta sẽ tìmđể  trùng .

Ta có  trùng  khi và chỉ khi: 

Vậy phương trình của đường kính chung là: 

**Bài 10:** Lập phương trình đường cong bâc hai đi qua góc tọa độ và nhận các cặp đường thẳng dưới đây và  làm cặp đường kính liên hợp.

**Giải**

Tọa độ tâm là nghiệm của hệ: ****

Gọi đường bậc hai có phương trình là: 

Tọa độ tâm là nghiệm của hệ sau:



Ta lại áp dụng mối liên hệ giữa hệ số góc của hai phương liên hợp ta được:



Giải (1),(2),(3),(4) ta được 

Vậy đường bậc hai cần tìm là: 

**CHỦ ĐỀ 5:**

**1.Cách phân loại đường bậc hai**

(C): F(x,y) = ax2 + 2bxy + cy2  +2dx +2ey +f =0 (1)

1.1 **Nhận xét :**

* Trong hệ trục trực chẩn bằng cách quay và tịnh tiến hoặc ngược lại ta sẽ đem phương trình (1) về dạng không chứa số hạng bậc 1: x, y và số hạng xy.
* Trong hệ trục afin ta có thể đem phương trình (1) về dạng không chứa số hạng xy bằng phép biến đổi hệ toạ độ

TH1 : a = c =0: (1) → 2bxy +2dx +2ey +f =0 (1’)

Đặt x = x’ + y’

y = x’ - y’

1. → 2b(x’2 - y’2) + 2d(x’ + y’) + 2e(x’ - y’) + f = 0

TH2 : a2 + b2 ≠ 0

Giả sử : a≠ 0

(1’)→ a( x + y)2 + [c – ()2]y2 +2dx +2ey +f =0 (1’’)

Đặt x’ = x + y

y’ = y

(1’’) → a x’2 + [c – ()2] y’2 +2dx +2ey +f =0 → không chứa hệ số xy.

* Vậy bằng cách biến đởi hệ trục toạ độ thích hợp ta luôn giả sử rằng phương trình dường bậc hai tổng quát có dạng :

ax2  + cy2  +2dx +2ey +f =0 (1) với a2 + b2 ≠ 0

* 1. 1.2 **Biện luận các dạng của đường bậc hai (C):**

(C) : ax2  + cy2  +2dx +2ey +f =0 (1) với a2 + b2 ≠ 0

* **TH1**: a,c ≠ 0

1. → a( x + )2 +c( y + )2 + f - d - e = 0 (2)

Đặt x’ = x + 

y’= y + 

k = -( f - d - e)

1. → ax’2 + b y’2 = k (3)

* **TH 1.1** : k ≠ 0 (3) → x’2 +  y’2 = 1 (4)
* TH 1.1.1 : ,  > 0

Đặt x’’ = x’

y’’ = y’

1. → x’’2 + y’’2 = 1 → (C) là elip

* **TH 1.1.2**: ,  < 0 :

(4) → - x’2 - y’2 = -1

→( x’ )2 + (y’ )2 = -1 (5)

→ x’’2 + y’’2 = -1 → (C) là elip ảo.

Với x’’ = x’

y’’ = y’

* **TH 1.1.3**:  > 0 > 

(4) →( x’)2 - (y’ )2 = 1 → x’’2 - y’’2 = 1 → (C) là hihebol.

Với x’’ = x’

y’’ = y’

* **TH 1.1.4** :  < 0 < 

(4) → -( x’)2 + (y’)2 = 1 → -x’’2+y’’2 = 1 → (C) là hihebol.

Với x’’ = x’

y’’ = y’

* **TH 1.2** : k = 0

(3)→ ax’2 + b y’2 = 0 (5)

* **TH 1.2.1** : a,c > 0

(5)→ (x’)2 + (y’ )2 = 0

→ x’’2 + y’’2 = 0 với x’’ = x’

y’’ = y’ 

→( x’’ – i y’’ )( x’’ + i y’’) = 0

→ (C) là hai đường thẳng ảo cắt nhau.

* **TH 1.2.2** : a, c < 0

(5)→ (x’)2 + (y’)2 = 0

→ x’’2 + y’’2 = 0 với x’’ = x’

y’’ = y’ 

→( x’’ – i y’’ )( x’’ + i y’’) = 0

→ (C) là hai đường thẳng ảo cắt nhau.

* **TH 1.2.3** : a > 0 > c :

(5)→(x’)2 - (y’)2 = 0

→x’’2  - y’’2 = 0 với x’’ = x’

y’’ = y’ 

→(x’’ + y’’)( x’’ – y’’) = 0

→ (C) là 2 đường thẳng thực cắt nhau.

* **TH 1.2.4** : a < 0 < c : tương tự như TH 1.2.3 : → (C) là 2 đường thẳng thực cắt nhau.
* TH 2 : a.c = 0:

Giả sử a ≠ 0 , b =0

(1) → ax2  +2dx +2ey +f =0

→ ( x + )2 +2y +  – ()2 = 0

→ x’2  + 2y’ +  – ()2 = 0 (6) với x’ = x + 

y’ = y

* **TH 2.1** : e ≠ 0

(6) → x’2  +2(y’ + - .()2) = 0

→ x’’2  + 2y’’ = 0 với x’’ = x’

y’’ = (y’ + - .()2)

→ (C) là parabol.

* **TH 2.2** : e = 0

(6) →x’2  +  – ()2 = 0

→ x’2 + k’2 = 0 (7) với k’ =  – ()2

* TH 2.2.1 : k’ = 0

(7) → x’2 = 0

→ (C) là hai đường thẳng trùng nhau.

* **TH 2.2.2** : k’ > 0

(7) →x’2()2 + 1 = 0 → x’’ + 1 =0 với x’’ = x’ 

→(x’’ – i) (x’’ + i) = 0

→ (C) là hai đường thẳng ảo song song với nhau.

* **TH 2.2.3** : k’ < 0

(7) → x’2()2 – 1 = 0 → x’’ - 1 =0 với x’’ = x’

→(x’’ – 1) (x’’ + i) = 0

→ (C) là hai đường thẳng thực song song với nhau.

**Tóm tắt :**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Loại đường cong (C) | Hệ trục Afin | Hệ trục trực chuẩn |
| 1.Elip | x2 + y2 = 1 | ()2 + ()2 = 1  a = b→(C): đường tròn |
| 2.Elip ảo | x2 + y2 = -1 | ()2 + ()2 = -1  ( a, b ∈ R ) |
| 3.Hyperbol | x2 + y2 = 1 | ()2 - ()2 = 1  ( a, b ∈ R ) |
| 4.Cặp đt ảo cắt nhau | x2 + y2 = 0 | ()2 + ()2 = 0  ( a, b ∈ R ) |
| 5. Cặp đt thực cắt nhau | x2 - y2 = 0 | ()2 - ()2 = 0  ( a, b ∈ R ) |
| 6.Parabol | x2 + 2y = 0 | x2 + 2by = 0 ( b ∈ R ) |
| 7.Hai đt trùng nhau | x2 = 0 | x2 = 0 |
| 8.Cặp đt thực song song | x2 - 1 = 0 | x2 – a2 = 0 |
| 9.Cặp đt ảo song song | x2 + 1 = 0 | x2 + a2 = 0  ( a ∈ R ) |

**2.Bài tập:**

**Bài 1:** Xác định dạng của đường bậc hai sau trong Afin và trong trực chuẩn: (1)

**Giải**

**Trường hợp 1: Trong Afin:**



Đặt 



Đặt 

Đặt 

Vậy đường bậc hai này này là elip.

**Trường hợp 2: Trong trực chuẩn**

Trong trực chuẩn ta cũng có thể làm tương tự như trên. Nhưng bây giờ ta sẽ trình bày theo phép quay và phép tịnh tiến.

Tọa độ của tâm là nghiệm của hệ: 

Tịnh tiến theo vectơ , công thức đổi trục:  ta suy ra:   

Tiếp theo ta sẽ quay.

công thức đổi trục: 

Từ đó ta có được dạng của đường bậc hai là đường tròn.

**Bài 2:** Chứng tỏ rằng phương trình  biểu diễn một cặp đường thẳng và lập phương trình mỗi đường thẳng đó.

**Giải**

Ta xem phương trình: như là một phương trình theo ẩn 

Vậy phương trình  biểu diễn hai đường thẳng và phương trình của d\hai đường thẳng đó là: ,

**Bài 3:** Hỏi với giá trị nào của ,phương trình  biểu diễn một cặp đường thẳng.

**Giải**

Xem phương trình **** như là một phương trình bậc hai theo ẩn  



Để **** biểu diễn một cặp đường thẳng thì



Xét 

Trường hợp còn lại ta cũng có 

Vậy 

**Bài 4:** Biện luận theo  loại của đường cong sau: (1)

**Giải**

Ta có: 

Đặt 



Nếu  thì (1) biểu diễn một parabol

Nếu  thì (1) biểu diễn một elip

Nếu  thì (1) biểu diễn một hyperbol

Nếu  thì (1) biểu diễn hai đường thẳng thực cắt nhau

**CHƯƠNG III.**

**A. Khái quát về mặt bậc hai**

**I.Định nghĩa**

Trong hệ trục tọa Oxyz, tập hợp những điểm  có dạng sau:

 trong đó  được gọi là mặt bậc hai

Hai mặt bậc hai trùng nhau khi các hệ số tương ứng tỉ lệ.

**Ví dụ:**

 (mặt cầu)

 (elipxoit)

 (hyperboloit 1 tầng)

 (hyperboloit 2 tầng)

 (paraboloit elliptic)

 (paraboloit hyperbolic)

**II. Giao điểm của đường thẳng và mặt bậc hai**

**1.Thiết lập công thức**

Cho mặt bậc hai (S) có phương trình là:  (1)

Gọi (d) là đường thẳng qua  và có vectơ chỉ phương là khi đó (d) có phương trình là:  () (2)

Xét hệ (1) và (2) . Thay (2) vào (1) thì (1) có dạng:  (\*)

Trong đó :







Ta có các trường hợp sau xảy ra:

*  (d) nằm hoàn toàn trong (S)
*  (d) và (S) không có điểm chung
*  (d) và (S) chỉ có 1 điểm chung
*  (d) cắt (S) tại hai điểm thực phân biệt
*  (d) cắt (S) tại hai điểm thực trùng nhau
*  (d) cắt (S) tại hai điểm ảo phân biệt

**2.Ví dụ áp dụng**

**Bài 1:** Tìm giao điểm của mặt bậc hai (S):  và đường thẳng :

(d):

**Giải**

Ta viết (d) dưới dạng: 

Thay x,y,z vào phương trình của (S) ta được phương trình sau: 

* 
* 

Vậy tọa độ 2 giao điểm của (d) và (S) là ,

**Bài 2:** Tìm giao điểm của mặt bậc hai (S):  và đường thẳng :(d): 

**Giải**

Ta viết (d) dưới dạng: 

Thay  vào phương trình của (S) ta được: 



Vậy (d) nằm hoàn toàn trong (S)

**Bài 3:** Tìm giao điểm của mặt bậc hai (S):  và đường thẳng :(d): 

**Giải**

Thay  từ phương trình của (d) vào phương trình của (S) ta được:

Vậy (d) cắt (S) tại 2 điểm trùng nhau 

**III.Phương tiệm cận, tâm, mặt kính liên hợp với một phương.**

**A.Tâm của đường bậc hai**

**1. Định nghĩa**: Cho mặt bậc hai (S). Điểm I gọi là tâm của (S) nếu như trong hệ trục tọa độ với tâm I thì phương trình của (S) không chứa số hạng bậc nhất 

**2. Công thức xác định tâm**

* Bằng cách làm tương tự như trong phần đường bậc hai, ta cũng có công thức tương tự trong mặt bậc hai như sau:

Cho mặt bậc hai (S) có phương trình: 

Khi đó tọa độ của tâm (nếu có) là nghiệm của hệ phương trình sau: (\*)

Hệ phương trình (\*) có thể vô nghiệm, có một nghiệm duy nhất, có vô số nghiệm. Trong trường hợp hệ (\*) có nghiệm duy nhất thì ta nói mặt bậc hai có tâm.

* Gọi  khi đó phương trình của đường bậc hai trong hệ trục tọa độ là

**3. Ví dụ áp dụng**

**Bài 1:** Xác định tâm của mặt bậc hai sau: ****

**Giải**

Giả sử là tâm của mặt bậc hai, khi đó tọa độ của nó là nghiệm của hệ phương trình:



Giải hệ ra ta được: 

Vậy mặt bậc hai này thuộc loại có tâm và tọa độ tâm là: 

**Bài 2**: Xác định tâm của mặt bậc hai sau: 

**Giải**

Giả sử là tâm của mặt bậc hai, khi đó tọa độ của nó là nghiệm của hệ phương trình: 

Giải hệ trên ta thấy nó vô nghiệm. Vậy mặt bậc hai đã cho không có tâm.

**Bài 3:** Xác định tâm của mặt bậc hai sau:****

**Giải**

Giả sử là tâm của mặt bậc hai, khi đó tọa độ của nó là nghiệm của hệ phương trình:  

Ta thấy hệ trên có vô số nghiệm thỏa mãn phương trình 

Vậy mặt bậc hai này có vô số tâm và tập hợp những tâm này là mặt phẳng có phương trình 

**Bài 4**: Lập phương trình của mặt bậc hai biết rằng nó qua điểm  và qua đường  và tâm của nó là 

**Giải**

Gọi mặt bậc hai (S) tổng quát có phương trình là: 

(S) qua điểm **** nên  (1)

Tọa độ tâm là nghiệm của hệ: 

Giao của mặt bậc hai với mặt phẳng Oxy là: 

Từ đó ta suy ra: 



Kết hợp với (1) thì ta có hệ sau: 

Vậy đường bậc hai cần tìm là: 

**B.Phương tiệm cận**

**1.Định nghĩa**: Nếu đường thẳng (d) và mặt (S) chỉ có một diểm chung ở phần hữu hạn của không gian, ta bảo (d) có phương tiệm cận đối với mặt. Mặt bậc hai có vô số phương tiệm cận (thực hay ảo)

* Cho mặt bậc hai (S) có phương trình:



Phương  gọi là phương tiệm cận của đường bậc hai (S) nếu như:



* Tập hợp những đường thẳng có phương là phương tiệm cận và đi qua tâm gọi là nón tiệm cận của mặt.

***Bài toán:******Cho mặt bậc hai (S) và giả sử (S) có tâm:***

**

*Ta sẽ tìm phương trình của nón tiệm cận của (S).*

**Giải:**

Gọi là tâm của (S),  là phương tiệm cận của (S)



Ta lại có: (\*)

Từ phương trình của (d) ta rút  và thay vào (\*) thì ta được:



Vậy phương trình của nón tiệm cận của (S) là:



**2.Ví dụ áp dụng**

**Bài 1:** Tìm phương trình đường thẳng (d) vuông góc với trục Oz và có phương tiệm cận đối với mặt (S) có phương trình:



**Giải:**

Gọi vectơ chỉ phương của (d) là  theo đề ta có: 

(d) có phương tiệm cận đối với (S) nên : 

Do 

Chọn  

Vậy tập hợp các đường thẳng cần tìm chính là các đường thẳng vectơ chỉ phương là 

**Bài 2:** Lập phương trình nón tiệm cận của mặt bậc hai sau:



**Giải**

Gọi  là tâm của (S), khi đó tọa độ của I là nghiệm của hệ phương trình sau:



Khi đó phương trình của nón tiệm cận của (S) là:



**Bài 3:** Tìm quỹ tích những đường thẳng qua góc tọa độ và có phương tiệm cận cận đối với mặt:

****

**Giải**

Ta có  và (\*)

Thay  vào (\*) ta sẽ được phương trình của quỹ tích là: 

**C.Mặt kính liên hợp với một phương.**

**1. Định nghĩa:**Cho mặt bậc hai (S) có phương trình: 

và phương  không là phương tiệm cận. Khi (d) có phương  cắt (S) tại 2 điểm M,N phân biệt thì các trung điểm của MN nằm trên một mặt phẳng mà ta gọi là mặt kính lien hợp với phương 

**2. Phương trình của mặt kính liên hợp:**

**Bài toán**:Cho mặt bậc hai (S) có phương trình: 

 không là phương tiệm cận , (d) có phương  cắt (S) tại 2 điểm phân biệt . Ta sẽ đi thiết lập công thức phương trình của mặt kính liên hợp với phương 

**Giải**

Gọi trung điểm của  là 

Ta có:  (2)

Thay (2) vào (1) ta được phương trình:  (3) trong đó 





 là hai nghiệm của phương trình (3)

Ta có 

 và 

I là trung điểm của nên 

Do 

Vậy phương trình của mặt kính liên hợp với phương  là 

**3. Ví dụ áp dụng**

**Bài 1:** Tìm mặt kính của mặt:  liên hợp với các dây song song với:  
a. Đường thẳng   
b. Trục   
c. Trục   
d. Trục 

**Giải**

a) 

Từ đó ta suy ra phương trình của mặt kính là:  hay ta viết gọn lại là: 

b) 

Từ đó ta suy ra phương trình của mặt kính là:  hay 

c) 

Từ đó ta suy ra phương trình của mặt kính là:  hay 

d) ) 

Từ đó ta suy ra phương trình của mặt kính là:  hay 

**IV.Giao điểm của mặt phẳng và mặt bậc hai**

Cho mặt bậc hai (S) và một mặt phẳng (P). Không mất tính tổng quát ta có thể chọn hệ trục tọa độ sao cho (P) là mặt phẳng Oxy ( có thể là Oyz, Ozx). Khi đó giao điểm của (d) và (S) có tọa độ thỏa mãn hệ phương trình sau: 

Như vậy giao của một mặt phẳng và một mặt bậc hai có thể không có điểm nào, đường thẳng, mặt phẳng hoặc một đường bậc hai.

Để xác định giao của mặt phẳng và mặt bậc hai ta có thể thực hiện phép chiếu lên các trục tọa độ.

**Bài tập:**

**Bài 1:** Xét đường là giao tuyến của:  và  trong hệ trục tọa độ trực chuẩn

**Giải**

Phương trình của giao tuyến là: 

Chiếu đường này lên trục Oyz ta được : 

Vậy phương trình của giao tuyến chính là phương trình của một elip.

**Bài 2:Xét đường là giao tuyến của:**  **và**  **trong hệ trục tọa độ trực chuẩn**

**Giải**

Phương trình giao tuyến là: 

Chiếu đường này lên trục  ta được 

Vậy giao tuyến là hai đường thẳng thực cắt nhau ( theo lý thuyết của đường bậc hai)

**Bài 3:** Xét đường là giao tuyến của:  và  trong hệ trục tọa độ trực chuẩn

**Giải**

Phương trình giao tuyến là: 

Chiếu đường này lên trục  ta được 

Xét 

Đặt 

Đặt 

Vậy giao của mặt và đường là một elip ảo

**V. Phân loại mặt bậc hai**

**I.Các dạng mặt bậc hai**

Bằng cách đổi trục tọa độ thích hợp ta đưa (S) về một trong các dạng sau:

**Tổng cộng có 17 dạng:**

**Afin Trực chuẩn Tên gọi**

  elipxoit thực

  elipxoit ảo

  hyperboloit 1 tầng

  hyperboloit 2 tầng

  nón thực

  nón ảo

  paraboloit elliptic

  paraboloit hyperbolic

  trụ elip thực

  trụ elip ảo

  trụ hyperboloit

  2 mặt phẳng thực cắt nhau

  2 mặt phẳng ảo cắt nhau

  trụ paraboloic

  mặt phẳng thực song song

  2 mặt phẳng ảo song song

  2 mặt phẳng thực trùng nhau

**II.Bài tập**

**Bài 1**: Xác định dạng của mặt bậc hai sau trong hệ trục tọa độ trực chuẩn cho bởi phương trình:

** (1)**

**Giải**

Ta sẽ tìm cách làm mất từng số hạng chũ nhật, và từng số hạng bậc nhất.

Ta viết (1) thành:



Ta chuyển trục tọa độ theo công thức sau:

Đặt  ta suy ra

(1): 

(2)



Đặt 

Khi đó (2) có thể viết lại thành:





Đặt  

Đặt  

Vậy mặt bậc hai đã cho chính là mặt nón thực.

**Bài 2:** Xác định dạng của mặt bậc hai sau trong hệ trục tọa độ trực chuẩn cho bởi phương trình:

** (1)**

**Giải**

Nhận xét: Đây là mặt bậc hai không có tâm.

Ta viết (1) thành: 

Đặt 

Đặt 



Đặt 

Vậy mặt đã cho là mặt yên ngựa.

**Bài 3:** Xác định dạng của mặt bậc hai sau trong hệ trục tọa độ trực chuẩn cho bởi phương trình:

** (1)**

Giải

Ta có: (1) tương đương với: 



Đặt  

Vậy mặt đã cho là mặt trụ hyperbol.

**Bài 4:** Xác định dạng của mặt bậc hai sau trong hệ trục tọa độ trực chuẩn cho bởi phương trình:

** (1)**

**Giải**

Ta có (1) tương đương với: 

Đặt 

Vậy mặt đã cho là mặt nón ảo.

**Bài 5:** Xác định dạng của mặt bậc hai sau trong hệ trục tọa độ trực chuẩn cho bởi phương trình:

** (1)**

**Giải**

Ta có (1) tương đương với:

Đặt 





Đặt 





Đặt 





Đặt 

Vậy mặt đã cho là hai đường thẳng thực cắt nhau.

**Bài 6:** Xác định dạng của mặt bậc hai sau trong hệ trục tọa độ trực chuẩn cho bởi phương trình:

** (1)**

**Giải**

Ta có (1) tương đương với: 

Đặt 



Đặt 

Đặt 

Vậy mặt đã cho là nón thực

**Bài 7:** Xác định dạng của mặt bậc hai sau trong hệ trục tọa độ trực chuẩn cho bởi phương trình:

** (1)**

**Giải**

Ta có 



Đặt 

Vậy mặt đã cho là hai mặt phẳng thực trùng nhau.

**Bài 8:** Xác định dạng của mặt bậc hai sau trong hệ trục tọa độ trực chuẩn cho bởi phương trình:

** (1)**

**Giải**

Ta có:****



Đặt 



Đặt 

Vậy mặt đã cho là mặt trụ elip.

**Bài 9:** Xác định dạng của mặt bậc hai sau trong hệ trục tọa độ trực chuẩn cho bởi phương trình:

** (1)**

**Giải**

Ta có: ****



Đặt 





Đặt 



Đặt 

Vậy mặt đã cho là hai đường thẳng ảo cắt nhau.

**VI. Mặt kẻ**

**Định nghĩa**: Nếu mỗi điểm thuộc mặt bậc hai đều có đường thẳng đi qua nó và nằm hoàn toàn trên mặt thì ta nói mặt đó chính là mặt kẻ.

**A.Hyperboloit 1 tầng**.

**1.Định nghĩa**:

Mặt bậc hai (S) gọi là hyperboloit 1 tầng nếu như trong một hệ trục tọa độ trực chuẩn nào đó thì phương trình chính tắc của nó có dạng:  

**2.Các tính chất của mặt hyperboloit 1 tầng**

* Hyperboloit 1 tầng đối xứng đối với các mặt tọa độ, các trục tọa độ, góc tọa độ.
* Giao của hyperboloit 1 tầng với mặt phẳng song song với trục Oz là hyperbol hoặc cặp đường thẳng.
* Hyperboloit 1 tầng (S) chứa hai họ đường thẳng sau:

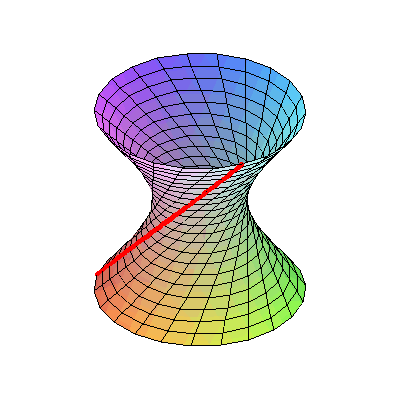
 và họ: 

Thật vậy, nếu điểm thỏa (I) hoặc (II) thì nó thỏa phương trình (S).

Vì lý do đó người ta gọi hyperboloit 1 tầng là mặt kẻ bậc hai. Các đường thẳng của hai họ nói trên gọi là các đường sinh thẳng của (S).

* Mặt bhyperboloit có các phương tiệm cận là  với điều kiện 
* Các đường thẳng đi qua tâm O và có các vectơ chỉ phương là phương tiệm cận gọi là đường tiệm cận của hyperboloit 1 tầng.
* Các đường tiệm cận tạo thành mặt nón gọi là nón tiệm cận có phương trình: 
* Phương trình của mặt kính của hyperboloit 1 tầng liên hợp với phương  không là phương tiệm cận là: 

**3.Hình ảnh của hyperboloit 1 tầng**



**4.Bài tập:**

**Dạng 1:Đường sinh thẳng của mặt hyperboloit 1 tầng**

**Bài 1:** Cho mặt hyperboloit 1 tầng (S): . Tìm đường sinh thẳng của (S) qua diểm (1,1,0).

**Giải**

Phương trình của (S) ta có thể viết lại là: 

Gọi (d) là đường thẳng đi qua (1,1,0) và có vectơ chỉ phương là 

(d): (1)

Thay (1) vào phương trình của (S) ta được:



Do (d) nằm hoàn toàn trên (S) nên ta có phương trình nghiệm đúng với mọi t tức là ta có hệ phương trình sau: (I)





Vậy ta có 2 đường sinh thẳng đi qua điểm (1,1,0) là :  và 

**Bài 2:** Cho mặt hyperboloit 1 tầng (S): . Tìm đường sinh thẳng của (S) song song với đường thẳng 

**Giải**

Goi (d) là đường sinh thẳng song song với đường thẳng **.**

Do (d) song song với đường thẳng **** nên (d) có vectơ chỉ phương là (1,1,-1).

(1)

Thay (1) vào phương trình của (S) ta được: 

Do (d) nằm hoàn toàn trên (S) nên  sẽ nghiệm đúng với mọi t 

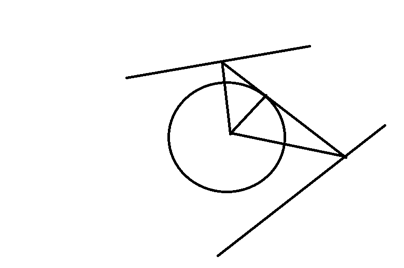


Vậy tập hợp những đường sinh thẳng song song với đường thẳng **** chính là 2 đường thẳng

**Dạng 2: Xác định phương trình của mặt hyperboloit**

**Bài toán: Tìm quỹ tích những đường thẳng tiếp xúc với mặt cầu:  và cắt hai đường thẳng  và đường thẳng .**

**Giải**

Gọi lần lượt là các điểm thuộc  và 



Suy ra phương trình đường thẳng qua hai điểm  là: (1)

Đường thẳng  tiếp xúc với mặt cầu khi và chỉ khi: 

(2)

Từ (1) ta suy ra: , thay vào (2) ta được: 

Đặt 

Vậy quỹ tích cần tìm chính là 2 mặt hyperboloit 1 tầng.

**Dạng 3: Các bài toán khác**

**Bài 1:** Xét giao tuyến của hyperboloit 1 tầng  và mặt phẳng  bằng cách dùng hình chiếu của nó lên các mặt phẳng tọa độ.

**Giải**

Từ ****



Vậy phương trình hình chiếu của giao tuyến lên mặt phẳng xOy là: 

Ta có: 

Đặt 

Vậy giao tuyến chính là hai đường thẳng thực cắt nhau.

**Bài 2:** Tìm quỹ tích những tiếp tuyến với mặt  biết chúng tạo với các trục tọa độ những góc bằng nhau.

**Giải**

Gọi  thuộc (d) và (d) có vectơ chỉ phương là: 

(1)

Thay (1) vào phương trình của (S) ta được: (1)

(d) là tiếp tuyến của (S) khi và chỉ khi phương trình (1) có nghiệm kép, tức là:



Do (d) tạo với các trục tọa độ những góc bằng nhau nên:





Vậy quỹ tích chính là mặt bậc hai có phương trình  và đây chính là mặt trụ.

**B. Paraboloit hyperbolic (Mặt yên ngựa)**

1. Định nghĩa:

Mặt bậc hai (S) gọi là mặt paraboloit hyperboloic nếu như trong một hệ trục tọa độ trực chuẩn nào đó phương trình chính tắc của nó có dạng: 

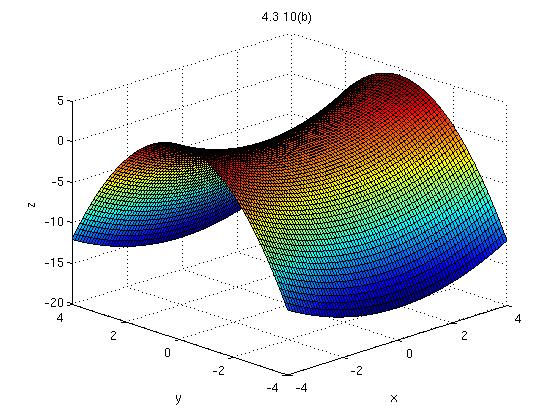
2.Tính chất

* Mặt yên ngựa là mặt kẻ, nó chúa hai họ đường sinh thẳng sau:

 và 

*  là phương tiệm cận của (S) nếu: 
* , phương trình mặt kính lien hợp với phương này có dạng: 

3.Hình ảnh của mặt paraboloit hyperboloic



4.Bài tập:

**Dạng 1:Đường sinh thẳng của mặt paraboloit hyperbolic 1 tầng**

**Bài 1:**Cho mặt bậc hai (S) có phương trình: .Tìm đường sinh thẳng của (S) đi qua A **.**

**Giải**

Gọi (d) là đường sinh thẳng đi qua .

(1)

Thay (1) vào (S) ta được: 



Cho 

Vậy có 2 đường sinh thẳng đi qua 

**Bài 2:** Cho mặt bậc hai (S): . Tìm các đường sinh thẳng của (S)song song với đường thẳng .

Giải

Ta gọi (l) là đường sinh thẳng của (S) và song song với (d) :

 (1)

Thay (1) vào phương trình của (S) ta được: 

Do (d) nằm hoàn toàn trong (S) nên (1)

Vậy những đường sinh thẳng của (S) song song với  là hai đường thẳng có dạng 

**Bài 3:** Trên mặt yên ngựa có phương trình:  tìm những đường sinh thẳng song song với mặt phẳng 3x+2y-4z=0

Giải

Một họ đường sinh thẳng của mặt yên ngựa có dạng: (1)

Ta viết (d) lại thành phương trình chính tắc như sau: 

Do (d) song song với 3x+2y-4z=0 nên 

Vậy phương trình một đường sinh thẳng phải tìm là 

Ta xét họ đường thẳng thứ hai là 

Ta tìm được đường thẳng thứ hai là: 

Vậy ta tìm được hai đường sinh thẳng của (S) là  và 

Dạng 2: Xác định phương trình của mặt yên ngựa

**Bài toán:Lập phương trình của mặt yên ngựa biết hai đường sinh thẳng của nó là:**  **và **

**Giải**

Gọi phương trình của mặt yên ngựa là: (1)





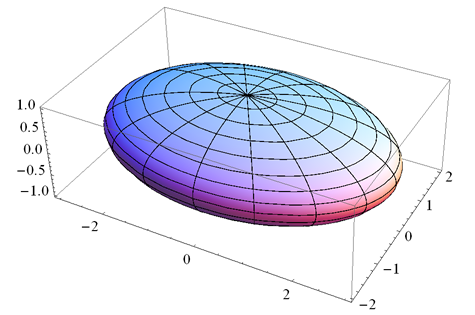
Thay  vào (1) ta được: 

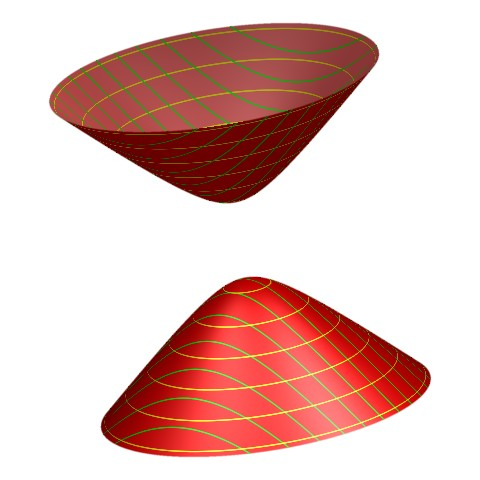


Thử lại ta thấy thỏa.

VII.CÁC MẶT KHÁC

1.Elip xôit

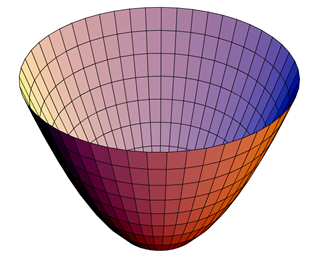


2.Hyperboloit 2 tầng



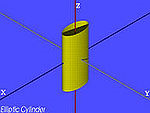
3.Paraboloit elliptic





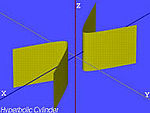
4.Trụ elliptic





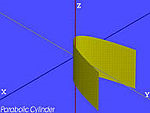
5.Trụ hyperboloit





6. Trụ paraboloit





VIII.Tiếp tuyến.Mặt phẳng tiếp xúc

1.Định nghĩa:

Một đường thẳng gọi là tiếp tuyến của mặt bậc hai (S) nếu nó cắt mặt bậc hai tại hai điểm trùng nhau

Tập hợp những tiếp tuyến với mặt bậc hai tai một điểm cho trước gọi tạo thành một mặt phẳng gọi là mặt phẳng tiếp xúc với (S)

2.Bài toán:

Cho mặt bậc hai (S)

và (d). Viết phương trình quỹ tích đường thẳng (d) tiếp xúc với (S) tại 

**Giải**

Phương trình của đường thẳng (d) qua  và có vectơ chỉ phương  là:

 (1)

Thay (1) vào phương trình của (S) ta được:  (2)

Do  (3)

Để (d) là tiếp tuyến của (S) thì (4)

Chọn  thỏa (4) thay vào (1) ta được  (\*)

Chọn  thỏa (4) thay vào (1) ta được

 (\*\*)

Chọn  thỏa (4) thay vào (1) ta được

 (\*\*\*)

Từ (\*), (\*\*), (\*\*\*) ta suy ra: 

Vậy toa có quỹ tích cần tìm là mặt phẳng có phương trình



Phương trình đó chính là phương trình của mặt phẳng tiếp xúc với (S) tại 

IX.Bài tập tổng hợp

**Dạng 1: Các bài toán về quỹ tích**

**Bài 1:**Tìm quỹ tích chân đường thẳng góc hạ từ tâm của mặt  đến mặt phẳng tiếp xúc với nó.

**Giải**

Tọa độ tâm là nghiệm của hệ: 

Phương trình của mặt phẳng (P) tiếp xúc với (S) tại  là:





Phương trình của đường thẳng qua  và vuông góc với mặt phẳng (P) là:

 thay vào phương trình của mặt phẳng (P) ta được:





Đặt 





Ta lại có: 

Từ đó ta suy ra quỹ tích cần tìm là mặt có phương trình 

**Bài 2:** Tìm quỹ tích trung điểm những dây của mặt  đi qua điểm ****

**Giải**

Phương trình đường thẳng qua **** có dạng:  (1)

Phương trình của mặt kính kiên hợp với phương  là: hay:

(2)

Từ (1) ta suy ra:  thay vào (2) ta được:



Đặt 

Vậy quỹ tích những trung điểm này cũng là một elipxoit với phương trình trong hệ trục tọa độ mới bằng cách tịnh tiến hệ trục tọa độ cũ đến điểm là 

**Bài 3:** Tìm quỹ tích những đường thẳng đi qua và luôn tựa trên một đường cho trước có phương trình: (I)

**Giải**

Ta gọi (d) là đường thẳng qua **** và có vectơ chỉ phương là  (ta có thể gọi được như vậy là do các hệ số của vectơ chỉ phương có tính chất tỉ lệ.

Phương trình của (d) là: (II)

Đường thẳng (d) tựa trên đường **** khi  phải thỏa mãn cả hệ (I) và (II).

Tiến hành khử  ta được .(\*)

Từ (II) ta rút  thay vào (\*) ta được .

Đây chính là phương trình của quỹ tích cần tìm. Đó chính là phương trình của mặt nón.

**Ví dụ:** Tìm quỹ tích của những đường thẳng đi qua góc tọa độ và tựa trên đường cho bởi phương trình: .

**Giải**

Phương trình của đường thẳng (d) qua góc tọa độ là: .

Để (d) tựa trên  thì phải có : (I)

Từ (I) suy ra 

mà ta lại có: 

**Bài 4:** Tìm quỹ tích những tiếp tuyến với elipxoit:  qua điểm 

**Giải**

Phương trình của mặt tiếp xúc với (S) tại điểm có tọa độ là: 

Mặt phẳng này qua **** nên 

Ta lại có 

Vậy quỹ tích cần tìm chính là đường thẳng qua điểm **** và tựa trên đường

Phương trình đường thẳng đi qua **** là: 





Lại thay  ta sẽ thu được phương trình của quỹ tích cần tìm là: 

**Bài 5:** Tìm quỹ tích những đường thẳng qua góc tọa độ và có phương tiệm cận đối với mặt:



**Giải**

Phương trình đường thẳng qua góc tọa độ có dạng: (1)

(d) có phương tiệm cận với(S) nên: 

Từ (1) ta suy ra: 

Vậy quỹ tích cần tìm chính là mặt nón có phương trình là: 

**Bài 6:** Tìm quỹ tích những đường thẳng chuyển động nhưng luôn dựa trên hai đường thẳng  và  và song song với mặt phẳng: 

**Giải**

Gọi lần lượt là hai điểm nằm trên đường thẳng .





Ta lại có:  song song với mặt phẳng  nên: 



Phương trình của đường thẳng  là: 

Từ (1),(2) ta suy ra:  thay vào (3) ta được: 

Vậy quỹ tích cần tìm là mặt yên ngựa .

**Bài 7:** Tìm quỹ tích những đường thẳng qua điểm (3,0,5) và tạo với mặt phẳng xoy một góc .

**Giải**

Phương trình đường thẳng qua (3,0,5) là: 

(d) tạo với mặt phẳng xoy góc 45 nên ta có: 

Ta lại có: 

Vậy quỹ tích cần tìm là mặt nón 

**Bài 8:** Tìm quỹ tích chân đường thẳng góc hạ từ điểm đến đường sinh của mặt nón: 

**Giải**

Tâm của mặt nón đã cho là .

Gọi M(x,y,z) là một điểm của quỹ tích ta suy ra: 

Ta lại có: 



Vậy quỹ tích cần tìm chính là giao của mặt cầu với mặt nón đã cho.

**Bài 9:** Tìm quỹ tích những đường thẳng có phương là: (5,3,2) và luôn tựa trên đường 

**Giải**

Phương trình của đường thẳng (d) qua  và có phương là (5,3,2) là: 

(d) tựa lên **** nên ta phải co x,y,z là nghiệm của 



Vậy quỹ tích cần tìm chính là mặt trụ có phương trình 

**Bài 10:** Tìm quỹ tích những đường thẳng chuyển động trong không gian nhưng luôn tựa lên ba đường thẳng sau:

,,

Giải

Gọi  là hai điểm lần lượt thuộc 

**Dạng 2:Các bài toán về sự tiếp tiếp tuyến, sự tiếp xúc.**

**Bài 1:** Cho hyperboloit 1 tầng:  và mặt phẳng (P): . Tìm điều kiện để (P) tiếp xúc với (S)

**Giải**

Phương trình mặt phẳng tiếp xúc với (S) tại  là: 

(P) tiếp xúc với (S) tại  thì ta phải có 





Vậy điều kiện để (P) tiếp xúc với  là 

**Nhận xét:**Bằng cách làm tương tự ta cũng có kết quả tương tự đối với elipxoit là: Điều kiện cần và đủ để (P) tiếp xúc với  là: 

**Bài 2:** Tìm mặt phẳng tiếp xúc với hyperboloit một tầng  và qua đường thẳng: 

**Giải**

Từ ta suy ra: 

Phương trình của mặt phẳng qua đường thẳng (d) là: 



Áp dụng công thức vừa chứng minh ở bài trên ta được: 



Vậy hai mặt phẳng cần tìm là: 

**Bài 3:** Tìm phương trình mặt phẳng tiếp xúc của:  và đi qua trục 

**Giải**

Phương trình của mặt phẳng tiếp xúc với (S) tại là:

 hay 

Do (P) đi qua trục  nên ta có:

Cho (\*)

Ta có (\*) phải đồng nhất với  ta suy ra (1)

Do (2)

Từ (1) và (2) suy ra: 

Vậy phương trình của mặt phẳng cần tìm: 

**Bài 4:** Từ điểm kẻ các đường thẳng tiếp xúc với 

Tìm quỹ tích các tiếp điểm.

**Giải**

Phương trình đường thẳng đi qua  là: 

(d) là tiếp tuyến nên ta suy ra: 

Do (d) qua O ta suy ra vectơ chỉ phương của (d) là: . Vậy ta có:





Vậy quỹ tích là giao của mặt phẳng với (S).

**Dạng 3:Lập phương trình của mặt dựa vào điều kiện cho trước**

**Bài 1:** Lập phương trình của mặt bậc hai đi qua các đường hyperbol sau đây:

**Giải**

Giả sử mặt bậc hai (S) có phương trình tổng quát là:  (\*)

Giao tuyến của (S) với là: 

Tương tự khi xét giao với các mặt  ta được phương trình của mặt cần tìm là:

